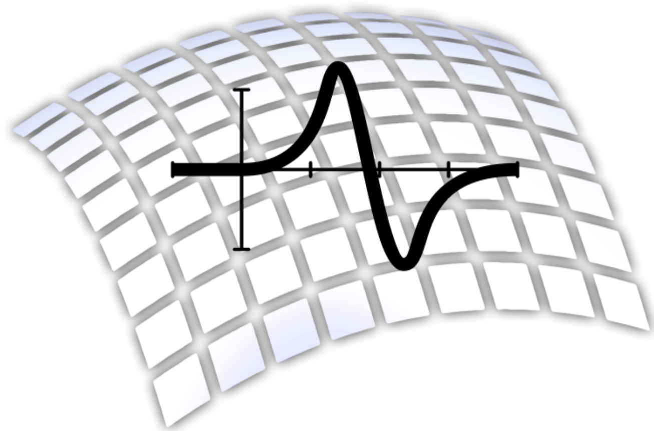
REVISTA DE MATEMATICĂ
COLEGIUL TEHNIC "TRAIAN VUIA" GALAȚI

AUTOmate



PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI
Aprilie 2016

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

COORDONATORI:

Prof. Alina Ciubotariu - Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Prof. Camelia Aurora Dumitrescu- Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Prof. Onel Liliana - Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Ing. Lidia Mazilu- Director adjunct Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Echipa de redacție :

Prof. Alina Ciubotariu - Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Prof. Camelia Aurora Dumitrescu- Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Prof. Onel Liliana- Colegiul Tehnic "Traian Vuia" Galaţi

Prof. Nicoleta Vasile - Școala gimnazială "Mihail și Gavril" Comuna Smârdan, Galați

Prof. Aura Iroveanu- Liceul Tehnologic "Anghel Saligny", Galați

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Aplicații în geometria cercului

Prof. Vasile Nicoleta Mariana,
Şcoala Gimnazială Mihail şi Gavril, com. Smârdan

1.Dreapta lui Simpson

Picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct Q al cercului C(O;r) determinat de punctele A, B, C, distincte două câte două, pe dreptele AB, BC, CA sunt puncte coliniare.

Demonstrație (Figura 1):

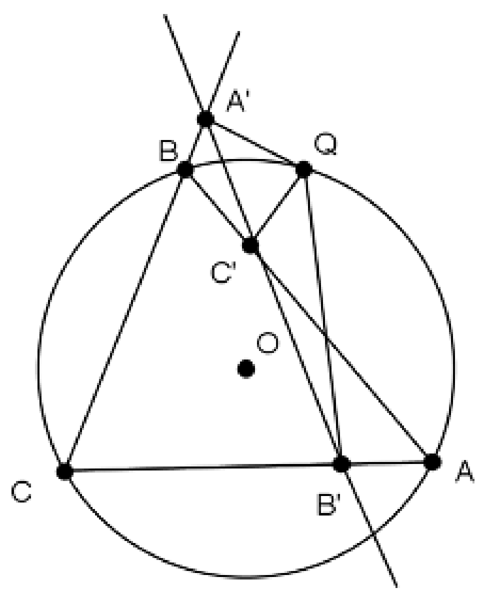


Figura 1

Conform ipotezei QA’ ⊥ BC, QC’ ⊥ AB, QB’ ⊥ AC. Deci patrulaterul QA’BC’ este inscriptibil, având unghiurile A’ și C’ cu măsura de 90°. Atunci m(∡BC’A’) = m(∡BQA’) = 90°- m(∡QBA’) = 90° - [180° - m(∡QBC)] = 90° - m(∡QAC). Deci m(∡BC’A’) = 90° - m(∡QAC).

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

De asemenea patrulaterul QC’B’A este inscriptibil deoarece unghiurile ∡QC’A și ∡QB’A sunt unghiuri congruente, au măsura egală cu 90°. Deci m(∡AC’B’) = m(∡AQB’) = 90° - m(∡QAB’).

Rezultă că unghiurile ∡BC’A’ și ∡AC’B’ sunt congruente. Dar punctele A, C’, B sunt coliniare, iar ∡BC’A’ ≡ ∡AC’B’, rezultă că aceste unghiuri sunt opuse la vârf, deci punctele A’, C’, B’ sunt coliniare. Dreapta pe care se află aceste puncte se numește “dreapta lui Simpson”.

2. Teorema lui Salmon

Dacă punctele A, B, C, M se află pe cercul C(O;r) atunci cercurile de diametre [MA], [MB], și [MC] se întâlnesc două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstratie (Figura 2):

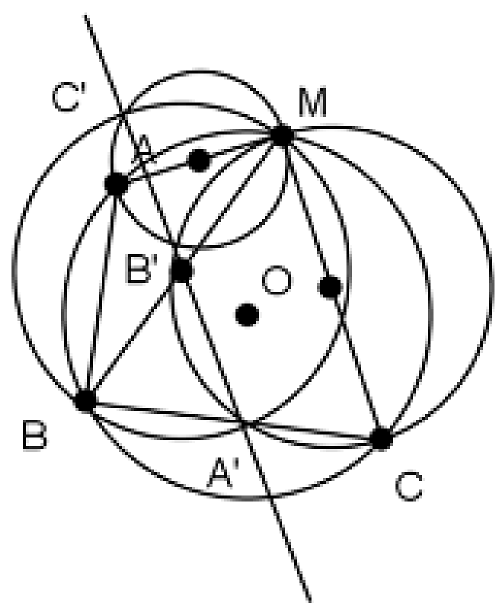


Figura 2

Fie B’ punctul de intersecție dintre cercurile de diametre [MA] și [MC]. Dar m(∡AB’M) = 90° și m(∡MB’C) = 90°, rezultă că A, B’, C coliniare și B’ = $pr_{AC}M$. Fie C’(

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

respectiv A') al doilea punct de intersecție al cercului de diametru [MA] și [MB] (respectiv [MC]). Se obține în mod analog C' = $pr_{AB}M$ și A' = $pr_{BC}M$. Conform teoremei lui Simpson rezultă că punctele A', B' și C' sunt coliniare.

3. Punctul lui Nagel

Dacă A', B', C' sunt punctele de tangență ale cercurilor exterioare cu laturile triunghiului △ABC, A' ∈ (BC), B'∈ (CA) si C' ∈ (AB), atunci dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

Demonstrație (Figura 3):

Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor exterioare triunghiului △ABC. Știind că unghiul ∡CBD este exterior triunghiului △ABC, avem m(∡CBD) = m(∡A) + m(∡C) ⇒ m(∡CBD) = 180 ° - m(∡B).

Rezultă că m(∡CBO_1) = 90 ° - $\frac{m(\measuredangle B)}{2}$. În triunghiul △A'B$O_1$, $ctg(90° - \frac{m(\measuredangle B)}{2}) = \frac{A'B}{r_a}$ ⇒

A'B = $r_a \cdot tg\frac{m(\measuredangle B)}{2}$, r_a fiind lungimea razei cercului cu centrul O_1.

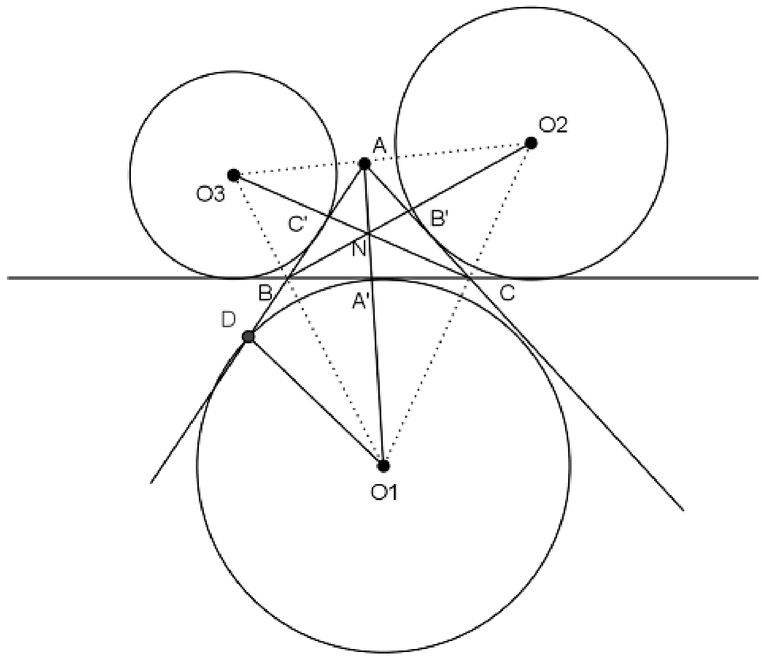


Figura 3

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Analog obținem $A'C = r_a \cdot tg\frac{m(\measuredangle C)}{2}$; $B'C = r_b \cdot tg\frac{m(\measuredangle C)}{2}$; $B'A = r_b \cdot tg\frac{m(\measuredangle A)}{2}$; $C'A = r_c \cdot tg\frac{m(\measuredangle A)}{2}$; $C'B = r_c \cdot tg\frac{m(\measuredangle B)}{2}$, unde r_b si r_c sunt lungimile razelor cercurilor cu centrele O_2 și O_3. Rezultă că $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Punctul de intersecție a celor trei drepte se numește punctul lui Nagel.

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

LEGEA DISJUNCŢIEI ÎN … GENETICĂ

Prof. ONEL LILIANA
Colegiul Tehnic ”Traian Vuia” Galaţi

A doua lege a lui Gregor Mendel este legea segregării independente a caracterelor (legea disjuncției).

Ea susține următoarele: descendenții obținuți din încrucișarea hibrizilor din prima generație formează grupuri asemănătoare cu formele parentale în proporție de 3A:1a. Deci trei sferturi din descendenți posedă caractere dominante, iar un sfert doar recesive.

Bineînțeles, doar în cazul când grupurile sunt separate după fenotip. Dacă însă la baza clasificării punem genotipul, raportul dintre hibrizii din a doua generație va fi altul: 1AA: 2Aa: 1aa.

Formula trebuie citită astfel: în a doua generație de hibrizi există o pătrime de homozigoți cu gene dominante, două pătrimi de heterozigoți și o pătrime de homozigoți cu gene recesive.

Dar, întrucât indivizii cu genotipul AA și cei cu genotipul Aa nu se deosebesc în aparență, obținem la aprecierea fenotipului, a caracterelor exterioare, formula de mai sus: 3A:1a.

În ce privește caracterul dominant, aici cei trei A se realizează din totalitatea numărului de hibrizi homozigoți și heterozigoți care aparent nu se deosebesc între ei.

Mendel a descoperit raporturile numerice experimentând pe mazăre.

În încrucișarea diferitelor soiuri de mazăre, florile roșii-liliachii domină asupra celor albe. Deci toți hibrizii din prima generație au flori roșii-liliachii. Știm că în acest caz acționează prima lege a eredității, descoperită de Mendel, și anume legea dominanței. Apoi, Mendel, prin metoda autopolenizării, a obținut o descendență de hibrizi heterozigoți din prima generație, și iată ce s-a întâmplat. Genele s-au scindat: cromozomii omologi s-au distribuit în diferiți gameți, combinându-se liber unul cu altul, s-au asociat în perechi și au format patru tipuri de noi grupuri de cromozomi: o

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

pătrime homozigoți dominanți cu flori roșii-liliachii, două pătrimi heterozigoți și o pătrime homozigoți cu flori albe recesive.

Întrucât, în conformitate cu prima lege a eredității, culoarea florilor heterozigote va fi roșie-liliachie, noua recombinare a cromozomilor în a doua generație de hibrizi se va exterioriza astfel încât vom avea 75% plante cu flori roșii-liliachii și 25% cu flori albe, în deplină concordanță cu formula legii a doua: 3A:1a.

Să nu uităm însă că raportul este aproximativ. El înseamnă doar o relație de șanse: în cazul nostru, florile vor avea trei șanse din patru să fie roșii-liliachii și doar una din patru ca să fie albe, asocierea gameților fiind dirijată de întâmplare. Trebuie efectuate numeroase încrucișări pentru ca rezultatele lor să se apropie de relația stabilită în mod empiric de Mendel. Calculele teoretice o confirmă. Numai legile statistice vor determina însă gradul de inexactitate, de neconcordanță a formulei și rezultatele practice obținute.

În toate procesele dirijate de legi statistice acționează o regulă simplă.

Regula rădăcinii pătrate din n

n - este numărul plantelor folosite în experiențe, iar rădăcina pătrată din n este numărul de abateri de la rezultatul teoretic așteptat. Deci, cu cât numărul plantelor este mai mare în cadrul unei experiențe, cu cât este mai mare cifra n, cu atât mai mic va fi gradul de inexactitate, cu atât mai puține vor fi abaterile de proporția așteptată.

Să presupunem că în experiența noastră au fost folosite 16 plante. Rădăcina pătrată din 16 este 4, deci în 4 cazuri din 16, hibrizii obținuți de noi nu vor corespunde regulii 3A:1a. Gradul de inexactitate este egal în cazul de față cu 25%. Dacă la experiență participă 100 de plante, abaterea va fi doar de 10%, iar la n egal cu 10 000, numai de 1%. Acum relația teoretic așteptată va deveni realitate. Abaterile vor fi neînsemnate.

Legile descoperite de Mendel dirijează în egală măsură atât plantele cât și animalele.

Aplicați legea segregării caracterelor în problema următoare:

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Se încrucișează o plantă cu frunze mari și alungite (MMAA) cu o plantă cu frunze mici și ovale (mmoo). În prima generație, F1, se obțin organisme hibride. Prin încrucișarea între ei a hibrizilor din F1, se obțin în F2, 16 combinații de factori ereditari.

Stabiliți următoarele:

a) Genotipul organismelor din F1;
b) Tipurile de gameți formați de organismele din F1;
c) Numărul combinațiilor din F2 dublu homozigote.

AUTOmate –APRILIE 2016
ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHI

Prof. Aura Iroveanu

Liceul Tehnologic "Anghel Saligny"- Galaţi

Teorema lui Pitagora generalizată

Teorema lui Pitagora se aplică in triunghiuri dreptunghice, adică are unghi cu masura de 90. Prezentăm generalizarea ei, numită și teorema cosinusului ,care se poate aplica in orice triunghi.

Teoremă:

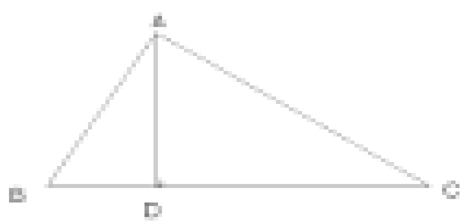
Dacă in triunghiul ABC, $m(\prec C) \prec 90$ și D= $pr_{BC}A$, atunci : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$.

Demonstrație:

Se disting 3 cazuri:

a) $m(\prec B) < 90$, notăm D= $pr_{BC}A$, atunci D$\in$BC.

ΔABC și ΔADC fiind dreptunghice vom aplica teorema lui Pitagora



$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ AD^2 = AC^2 - DC^2 \\ BD = BC - DC \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} AB^2 = AC^2 - DC^2 + (BC - DC)^2 \Leftrightarrow \\ \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC \end{array}$$

$m(\prec B) > 90$,atunci B$\in (DC)$

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ AD^2 = AC^2 - DC^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB^2 = AC^2 - DC^2 + (DC - BC)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$BD = DC - BC$$

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$

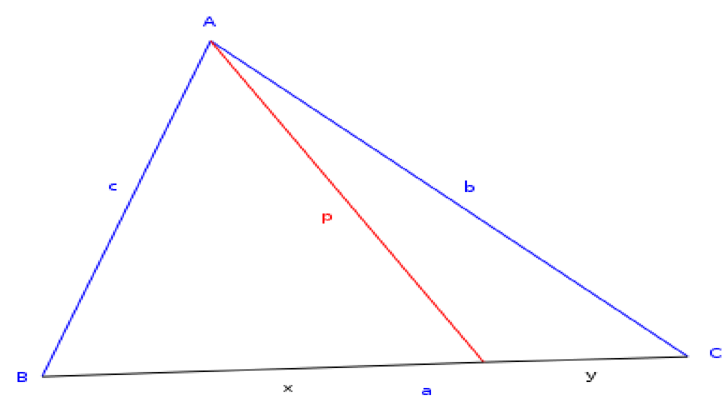
b) Pentru B unghi drept se aplică teorema lui Pitagora

Relaţia lui Stewart

Teorema lui Steward furnizeaza o relaţie intre lungimile laturilor unui triunghi şi lungimea segmentului dintr-un vârf la un punct de pe latura opusă.

Teorema(Teorema lui Stewart):

Fie un triunghi ABC cu lungimile laturilor BC= a , AC= b, AB= c. Fie P un punct pe latura BC care divide latura în doua segmente cu lungimile BP = x şi PC= y.Lungimea segmentului AP o vom nota cu p. Atunci:



$$a(p^2 + xy) = b^2x + c^2y.$$

Demonstraţie:

Vom numi P punctul în care latura a şi segmentul p se intersectează. Începem prin aplicarea legii cosinusurilor pentru unghiurile suplementare APB şi APC(sau putem aplica teorema lui Pitagora generalizată).

$$b^2 = p^2 + y^2 - 2py\cos\theta$$

$$c^2 = p^2 + x^2 + 2px\cos\theta$$

Înmulţim prima relaţie cu x, iar a doua cu y :

$$xb^2 = xp^2 + xy^2 - 2pxy\cos\theta$$

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

$$yc^2 = yp^2 + yx^2 + 2pxy\cos\theta$$

Acum adunăm cele două ecuații:

$$xb^2 + yc^2 = (x+y)p^2 + xy(x+y),$$

și obținem teorema lui Stewart.

Teorema medianei.

În geometria plană, teorema medianei stabilește o relație între lungimea unei mediane dintr-un triunghi și lungimile laturilor triunghiului. Teorema medianei este un caz particular al teoremei lui Stewart. Mai este numită teorema lui Apoloniu după Apoloniu din Perga.
Teorema :

Fie ΔABC cu D mijlocul laturii (BC). Atunci:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},$$ unde ma = AD, a = BC, b = AC, c = AB.

Demonstrație

In triunghiul ABC , AM mediana , $M \in BC$. Se aplică relația lui Stewart pentru segmentul AM

$$\left.\begin{array}{l} AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - MB \cdot MC \cdot BC \\ \text{Notam : BC= a, AC = b, AB = c, MB=MC = } \frac{a}{2}. \end{array}\right\} \Rightarrow AM^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \quad /:a$$

$$AM^2 = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

Bibliografie :

1. D. Brânzei. T. Precupanu – "Matematici elementare- probleme de sinteză", Ed. Junimea, 1983

2. A Corduneanu , GH. Radu.- "Culegere de probleme matematică", ed. Junimea, 1972

AUTOmate –APRILIE 2016
ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Sisteme de ecuatii liniare

Prof. Aura Iroveanu

Liceul Tehnologic "Anghel Saligny"

Sisteme de doua ecuatii cu doua necunoscute

Def. Un sistem de doua ecuatii cu doua necunoscute are forma

$(S):\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ unde a_1,b_1,a_2,b_2 se numesc coeficientii necunoscutelor , iar c_1,c_2 termenii liberi.

Def. Se numeste solutie a sistemului orice cuplu (s_1 , s_2) care este solutie pentru fiecare din ecuatiile sistemului.

Studiul solutiilor unui sistem de ecuatii liniare conduce la trei probleme:

- existenta solutiilor (conditiile in care un sistem admite solutii)
- gasirea unei metode de obtinere a solutiilor
- determinarea tuturor solutiilor

Un sistem care nu are nici o solutie se numeste **incompatibil**.Daca sistemul poseda solutii se spune ca este **compatibil** (**determinat** cu o solutie si **nedeterminat** cu mai mult de o solutie)

Doua sisteme **sunt echivalente** daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Metoda de rezolvare a unui sistem liniar consta in a inlocui sistemul dat printr-un nou sistem care este echivalent cu primul , dar care poate fi rezolvat mai usor.

Transformari aupra ecuatiilor unui sistem

O1) Adunarea unei ecuatii a sistemului la o alta ecuatie a sistemului

O2) Inmultirea ecuatiilor sistemului prin factori nenuli

O3) Schimbarea ordinii ecuatiilor intr-un sistem

ISSN 2501-2088

ISSN-L 2501-2088

Metode de rezolvare

1.Metoda combinatiilor liniare (metoda reducerii)

2.Metoda substitutiei

3.Metoda eliminarii (Gauss)

4)Regula lui Cramer

A = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ - **matricea sistemului** (formata din coeficienti necunoscutelor)

$\Delta = \det(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ - **determinantul sistemului**

$\Delta \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui x , prin coloana termenilor liberi)

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$(se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui y , prin coloana termenilor liberi)

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

5)Metoda matricii inverse

A = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

AX = C – **scrierea matriciala** a sistemului

Sisteme liniare omogene

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Sistemul $(S):\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$ in care termenii liberi sunt zero se numeste **sistem liniar omogen**.

Intotdeauna acest sistem este **compatibil** avand cel putin solutia banala (cu toate componentele egale cu zero) x = y = 0.

Daca $\Delta=\det(A)\neq 0$ atunci (formulele lui Cramer) sistemul are numai solutia banala.In acest caz sistemul este **compatibil determinat.**

Daca $\Delta=\det(A)=0$ atunci sistemul are si alte solutii diferite de cea banala.Sistemul este **compatibil nedeterminat**.

Sisteme de trei sau patru ecuatii cu doua necunoscute

Se poate rezolva sistemul format din doua ecuatii ale sistemului dat ,apoi se verifica daca solutiile obtinute sunt si solutii ale celorlalte ecuatii ale sistemului.

Sisteme de trei ecuatii cu trei necunoscute

Def. Un sistem de trei ecuatii cu trei necunoscute are forma $(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, unde a_i , b_i , c_i se numesc **coeficientii necunoscutelor** , iar d_i **termenii liberi** ai sistemului.

Def.Se numeste solutie a sistemului orice triplet (s_1 , s_2 , s_3) care este solutie pentru fiecare ecuatie a sistemului.

Interpretare geometrica

Cum fiecare ecuatie a sistemului este ecuatia unui plan in spatiul cartezian Oxyz , se poate interpreta geometric **sistemul compatibil determinat prin concurenta planelor intr-un punct** , iar **sistemul compatibil nedeterminat prin ocncurenta planelor dupa o dreapta** (sistem simplu determinat) **sau dupa un plan** (sistem dublu nedeterminat – cele trei plane coincid).In fine **sistemul incompatibil** corespunde celorlalte situatii ale planelor in spatiu (plane paralele , doua plane paralele intersectate de al treilea , plane concurente doua cate doua , fara punct comun pentru cele doua drepte etc.)

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Doua sisteme **sunt echivalente** daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Metode de rezolvare

1)Metoda combinatiilor liniare

2)Metoda eliminarii (Gauss)

Utilizand metoda lui Gauss (de eliminare succesiva a necunoscutelor prin transformari elementare) se ajunge de la sistemul initial la unul echivalent avand urmatoarea **forma tiunghiulara** :

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ L_3 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{array}$$

Etapele necesare de parcurs pentru a obtine forma triunghiulara a sistemuli (S)

$$(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \text{ si tabloul } \begin{array}{ccccc} & x & y & z & \\ L_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ L_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ L_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

Daca $a_1 \neq 0$, atunci prima ecuatie a sistemului ramane pe loc , iar zerourile de pe prima coloana le obtinem cu transformarile :

- ecuatia L_2 se inlocuieste prin ecuatia $L_2 - \frac{a_2}{a_1}L_1$

- ecuatia L_3 se inlocuieste prin ecuatia $L_3 - \frac{a_3}{a_1}L_1$

Pentru a obtine zeroul de pe colana a doua se face transformarea :

- ecuatia L_3 se inlocuieste prin ecuatia $L_3 - \frac{b_3}{b_1}L_2$

Daca $a_1 = 0$, atunci se ia drept ecuatie L_1 o alta ecuatie care sa aiba coeficientul lui x diferit de zero (se face o schimbare a doua ecuatii intre ele)

Pentru sistemul (S) doua matrici joaca un rol important in studiul lui.

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$ **– matricea sistemului**

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$$ **- matricea extinsa a sistemului**

3) Regula lui Cramer

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ **-** determinantul sistemului

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui x , prin coloana termenilor liberi)

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui y , prin coloana termenilor liberi)

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ (se obtine din Δ inlocuind coeficientii lui z , prin coloana termenilor liberi)

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

4) Metoda matricii inverse

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

AX = C – **scrierea matriciala** a sistemului

Daca $\det(A) \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}C$

Sisteme liniare omogene

Sistemul $(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ se numeste **sistem liniar omogen**

Intotdeauna acest sistem este **compatibil** avand cel putin solutia banala (cu toate componentele egale cu zero) x = y = z = 0.

Daca $\Delta = \det(A) \neq 0$ atunci (formulele lui Cramer) sistemul are numai solutia banala.In acest caz sistemul este **compatibil determinat.**

Daca $\Delta = \det(A) = 0$ atunci sistemul are si alte solutii diferite de cea banala.Sistemul este **compatibil nedeterminat**.

Sisteme de m ecuatii cu n necunoscute

Au forma : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (2)

Daca un sistem are solutii , atunci il numim **compatibil** (**determinat** daca are exact o solutie si **nedeterminat** daca sistemul are mai mult de o solutie)

Sistemul (2) se numeste **omogen** daca are toti termenii liberi egali cu zero.Sistemul astfel obtinut

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ se numeste **sistemul omogen asociat** sistemului (2).

Coeficientii necunoscutelor formeaza o matrice de tip m x n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ numita **matricea sistemului** (2)

Daca $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sunt coloana necunoscutelor si respectiv coloana termenilor liberi , atunci sistemul (2) se poate scrie sub **forma matriciala** AX = C.

Doua sisteme **sunt echivalente** daca sunt amandoua incompatibile sau sunt amandoua compatibile si au aceleasi solutii.

Discutia unui sistem

Compatibilitatea

Th.Kronecker – Capelli . Sistemul liniar (2) este compatibil daca si numai daca rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse.

Comform teoremei avem nevoie de calculul rangului matricii A.Daca rang(A) = r , atunci exista cel putin un minor nenul de ordin r.Pentru usurinta in prezentare sa presupunem ca minorul nenul de ordin r este format din primele r linii si primele r coloane.Pe acesta (considerat) il numim **determinant principal** si-l notam Δ_p.Ca sa avem egalitatea rang(A) = rang($\overline{A}$) trebuie probat ca orice minor al matricii $\overline{A}$ care-l contine pe cel principal si care nu este minor al lui A este nul.Orice astfel de minor de ordin r + 1 , obtinut prin bordarea determinantului principal cu elemente corespunzatoare ale coloanei termenilor liberi , precum si cu cele ale uneia din liniile ramase , se numeste **minor caracteristic**.Vom nota un astfel de minor prin $\Delta_{car,k}$, unde k indica linia utilizata pentru bordare.

Th.(Rouche) . Sistemul liniar (2) este compatibil daca si numai daca toti minorii caracteristici sunt nuli. Deci daca cel putin un minor caracteristic este nenul sistemul este incompatibil.

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

Determinarea solutiilor

Presupunem ca rang(A) = r si ca am ales ca determinant principal al sistemului compatibil $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix}$.De precizat ca odata ales determinantul principal cu el se merge pana la determinarea solutiilor.Necunoscutele ale caror coeficienti sunt in determinantul principal se numesc **necunoscute principale**.Deci in cazul nostru acestea sunt x_1 , x_2 , ..., x_r.Celelalte necunoscute (daca exista) adica x_{n+1} , ... , x_n se numesc **necunoscute secundare**.

Ecuatiile ale caror coeficienti se afla in determinantul principal se numesc **ecuatii principale**.In aczul de fata primele r ecuatii sunt principale.Celelalte ecuatii (daca exista) se numesc **ecuatii secundare**.

Se rezolva sistemul format din ecuatiile principale : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$ (*)

Solutiile acestui sistem sunt solutii si pentru (2) (din rang(A) = rang($\overline{A}$) , rezulta ca celelalte linii sunt combinatii liniare ale ecuatiilor principale , ceea ce arata ca o solutie a sistemului de mai sus este solutie si pentru (2)).

Analizam cazurile :

- daca r = n , atunci sistemul (*) are atatea ecuatii cate necunoscute.Pentru rezolvare se pot aplica formulele lui Cramer : $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_p}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_p};......; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta_p}$, unde Δ_{x_n} se obtine din Δ_p inlocuind coloana coeficientilor lui x_n cu termenii liberi.

- daca r < n , atunci in ecuatiile principale se inlocuiesc necunoscutele secundare variabil $x_{r+1} = \lambda_{r+1},....., x_n = \lambda_n; \lambda_k \in R$ si se rezolva sistemul format din ecuatiile principale (in care necunoscutele secundare trec in membrul drept).Pentru rezolvare se aplica regula lui Cramer.

ISSN 2501-2088

ISSN-L 2501-2088

APLICAȚII

1. Sa se rezolve sistemele de ecuatii liniare

a). $\begin{cases} 2x-3y+z=-9 \\ 5x-2y+2z=-5 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$ b). $\begin{cases} 3x+y+2z=8 \\ 2x-3y+z=1 \\ 5x+9y+4z=22 \end{cases}$ c). $\begin{cases} x-2y+4z=2 \\ -2x+5y-9z=-7 \\ -x+3y-5z=-4 \end{cases}$

2. Sa se rezolve sistemele liniare omogene :

a). $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ 3x-4y+5z=0 \\ 5x+y+2z=0 \end{cases}$ b). $\begin{cases} 4x+y-2z=0 \\ 11x-4y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ c). $\begin{cases} 5x+10y+5z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

3. Sa se rezolve sistemele de ecuatii liniare:

a). $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ b). $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ 2y+2z+t=2 \\ -2x+2y-t=2 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$ c). $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x-y+2z=4 \\ x-5y-4z=-8 \end{cases}$

4. Sa se rezolve si sa se discute dupa valorile parametrului real λ sistemele:

a). $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=2-\lambda \\ x+y+\lambda z=3\lambda+1 \end{cases}$ b). $\begin{cases} x+2y+(\lambda-3)z=5 \\ -x+(\lambda-5)y+2z=-1 \\ 2x+y+z=\lambda \end{cases}$ c). $\begin{cases} x+y-(\lambda-1)z=0 \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \\ x+\lambda y+z=0 \end{cases}$

5. . Se da sistemul $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+4z=-4 \\ mx+y+4z=-2 \end{cases}$ unde m este real

a) sa se determine m real pentru care solutia sistemului este (1;2;-2).

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088

b) sa se rezolve ecuatia $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 + 7m,$ unde este real.

c) pentru m=4 sa se rezolve sistemul .

6. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

a). Să se determine parametrul real m astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

b). Pentru $m \in R \setminus \{1\}$ să se rezolve sistemul

7**.** Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x+y+(m+1)z=m \\ x+(m-1)y+mz=2m \\ 5x+4y+3(m+1)z=3 \end{cases}.$

a) Pentru ce valori ale parametrului real m sistemul este compatibil determinat?
b) Să se rezolve sistemul pentru : i). m= 1; ii). m= - 1.

Bibliografie :

1. Marius Burtea, G. Burtea: „Matematică- manual pentru clasa a XI-a, M1”, Ed. Campion ,2006

2. Marius Burtea, G. Burtea: „Matematică- Exerciții și probleme- Elemente de algebră liniară”Ed. Campion , 2006

3. Adriana Dragomir, Ovidiu Bădescu: “Exerciții și problem de matemaică pentru clasa a XI-a” Ed.Bîrghi, RMT, 2013

4. http://www.profesoronline.ro

ISSN 2501-2088
ISSN-L 2501-2088